Cálculo I
Bloque II: Derivación e integración.

Rafael Bravo de la Parra

U. D. Matemáticas, Universidad de Alcalá

Curso 2020-21

Rectas tangentes y velocidades

La ecuación de una recta en el plano que pasa por el punto (a,b) y tiene pendiente m es $y = b + m(x-a)$.

Límite del cociente incremental

- Sea $f(x)$ una función continua en a. Si existe el límite
$$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
entonces la **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa por este punto y cuya pendiente es m:
$$y = f(a) + m(x-a)$$
- Sea $s = f(t)$ el desplazamiento de un objeto que se mueve en línea recta respecto al origen en el tiempo t. En el intervalo desde $t = a$ a $t = a+h$ tenemos
$$\text{velocidad media} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
y la **velocidad instántanea** $v(a)$ en el instante $t = a$
$$v(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Derivada de una función en un punto

Definición

*La **derivada de la función** $f(x)$ **en el punto** a, denotada $f'(a)$, es*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si el límite existe.
La derivada por la derecha, $f'_+(a)$, y por la izquierda, $f'_-(a)$, se definen análogamente utilizando, respectivamente, el límite por la derecha y por la izquierda.

Notaciones

$f'(x)$ f prima de x, $\frac{dy}{dx}$ derivada de y con respecto a x, y' y prima, y $\frac{d}{dx}(f(x))$ derivada con respecto a x de f de x.
El valor de la derivada en el punto a: $f'(a)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$, $y'(a)$ y $\left.\frac{d}{dx}(f(x))\right|_{x=a}$.

Ecuación de la recta tangente

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto a es

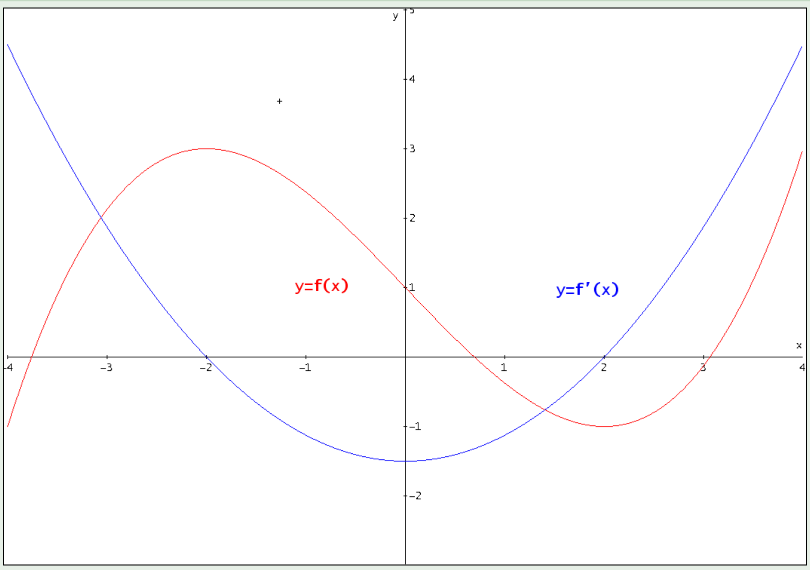
$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Función derivada

Definición

*La **función derivada** de $f(x)$, denotada $f'(x)$, es la función que tiene por dominio $dom(f') = \{x \in dom(f) : f'(x) existe\}$ y que a cada x le hace corresponder $f'(x)$.*

$y = f(x)$ e $y = f'(x)$



Función diferenciable y derivadas de orden superior.

Definición

La función $f(x)$ es ***diferenciable en*** *a si $f'(a)$ existe, y es* ***diferenciable en un intervalo abierto*** (a,b) *(donde a puede ser $-\infty$ y b puede ser ∞) si es diferenciable en todo punto del intervalo.*
f es ***diferenciable en un intervalo cerrado*** $[a,b]$ *si es diferenciable en el intervalo abierto (a,b), tiene derivada por la derecha en a y derivada por la izquierda en b.*

Teorema

Si $f(x)$ es diferenciable en a entonces es continua en a.

Definición (Segunda derivada y derivadas de orden superior.)

La segunda derivada de la función $f(x)$ es la derivada de la función derivada $f'(x)$ y se denota: $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, y'', *y* $\dfrac{d^2}{dx^2}(f(x))$.
En general, la derivada n-ésima de la función $f(x)$ es la derivada de la función derivada (n-1)-ésima y se denota: $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $y^{(n)}$, *y* $\dfrac{d^n}{dx^n}(f(x))$.

Linealización de una función en un punto.

Definición

La linealización de la función $f(x)$ en el punto a es la función polinómica de primer grado:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Linealización de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $a = 1$: $L(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1)$

$\mathbf{x}$	$\mathbf{f(x)} = \sqrt[3]{x}$	$\mathbf{L(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1)}$
0.9	0.9654893846	0.9666666666
0.99	0.9966554934	0.9966666666
0.999	0.9996665554	0.9996666666
0.9999	0.9999666655	0.9999666655
1.0001	1.000033332	1.000033333
1.001	1.000333222	1.000333333
1.01	1.003322283	1.003333333
1.1	1.032280115	1.033333333

Teorema

Las siguientes funciones son diferenciables:

1. *Funciones polinómicas y racionales.*
2. *Funciones potenciales en* $(0, \infty)$.
3. *Las funciones raiz salvo en el 0.*
4. *Funciones trigonométricas.*
5. *Función arcotangente. Las funciones arcoseno y arcocoseno salvo en* -1 *y* 1.
6. *Funciones exponenciales y logarítmicas.*
7. *La función valor absoluto salvo en el 0.*

Teorema

Sean $f(x)$ *y* $g(x)$ *funciones diferenciables en el punto a. Entonces también son diferenciables en a las funciones* $(f+g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ *y, si* $g(a) \neq 0$, $(f/g)(x)$. *Además:*

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
3. $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$

Teorema

Si la función $f(x)$ *es diferenciable en el punto a y la función* $g(x)$ *es diferenciable en el punto* $f(a)$ *entonces la función* $(g \circ f)(x)$ *es diferenciable en en el punto a y se verifica que:*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \qquad \textbf{\textit{Regla de la cadena}}$$

Derivación implícita

Una función se dice que está definida explícitamente cuando podemos escribir las imágenes de los elementos x del dominio de la forma $y = f(x)$.
En ocasiones una función queda definida a través de una relación entre las variables x e y, $F(x,y) = 0$, en este caso se dice que la función está **definida implícitamente**.
Con ayuda de la regla de la cadena se puede encontrar la derivada de la función mediante **derivación implícita** que consiste en considerar y como función de x, $y(x)$, y despejar $y'(x)$ en la expresión:

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = 0$$

Análogamente se puede utilizar la derivación implícita para obtener derivadas de orden superior de la función, por ejemplo la segunda derivada despejando $y''(x)$ a partir de:

$$\frac{d^2}{dx^2}F(x,y(x)) = 0$$

Teorema

Sea f una función diferenciable en un intervalo abierto (a,b). Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ o $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f es uno a uno.

Teorema (Derivada de la función inversa)

Sea f una función diferenciable en el intervalo I y tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Si f tiene una inversa, f^{-1}, en I entonces f^{-1} es diferenciable y su derivada verifica:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Derivación logarítmica

La derivación de algunas funciones complicadas, $y = f(x)$, que incluyen productos, cocientes y potencias se puede simplificar utilizando la **derivación logarítmica**:

1. Se toman logaritmos en $y = f(x)$, $\ln y = \ln f(x)$, y se simplifica todo lo posible el segundo miembro.
2. Se deriva implícitamente la versión simplicada de $\ln y = \ln f(x)$: $\dfrac{d}{dx}(\ln y) = \dfrac{d}{dx}(\ln f(x))$.
3. Y como $\dfrac{d}{dx}(\ln y) = \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}$ se tiene que $\dfrac{dy}{dx} = y\dfrac{d}{dx}(\ln f(x))$.

Razones de cambio relacionadas

La derivación ímplicita se utiliza también para encontrar razones (tasas o velocidades) de cambio de variables relacionadas que están cambiando en el tiempo.

1. Dentro del problema encontrar las cantidades que cambian en el tiempo y asignarles una variable (dependiente del tiempo, e.d., una función).
2. Relacionar las variables implicadas en el problema mediante una o más ecuaciones.
3. Derivar implícitamente con respecto al tiempo en las ecuaciones anteriores para obtener relaciones entre las razones de cambio de las variables (derivadas de la funciones).
4. Utilizar las razones de cambio que proporciona el problema para calcular las que pide, sustituyendo en las ecuaciones obtenidas en el punto anterior.

Teorema del valor medio.

Teorema (Teorema de Rolle)

Si f es una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) con $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema (Teorema del valor medio)

Si f es una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, equivalentemente, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Signo de f' y crecimiento de f.

Definición

*La función $f(x)$ es **creciente** (decreciente) **en el intervalo** I si, para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).*

Teorema

Sea f es una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b).
- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces $f(x)$ es creciente en $[a,b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$.
- Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces $f(x)$ es constante en $[a,b]$.

Corolario

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b). Entonces, $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$ si y sólo si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + c$ para todo $x \in [a,b]$.

Extremos locales y puntos críticos

Definición

1. *Se dice que la función $f(x)$ tiene un* ***máximo local o relativo*** *en c si está definida y verifica que $f(x) \leq f(c)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c.*
2. *Se dice que la función $f(x)$ tiene un* ***mínimo local o relativo*** *en c si está definida y verifica que $f(x) \geq f(c)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c.*

Los máximos y mínimos locales se denominan extremos locales.

Teorema

Si la función $f(x)$ tiene un extremo local en c, entonces o $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Definición

Sea una función $f(x)$, los puntos c de su dominio para los que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe se denominan ***puntos críticos****.*

Los extremos locales de una función se alcanzan en puntos críticos.

Extremos locales

Teorema (Criterio de la 1ª derivada)

Supongamos que c es un punto crítico de la función $f(x)$ y que ésta es continua en c.

1. *Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, c+\delta)$ entonces en c se alcanza un máximo local.*
2. *Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c, c+\delta)$ entonces en c se alcanza un mínimo local.*
3. *Si existe $\delta > 0$ tal que el signo de $f'(x)$ se mantiene para $0 < |x-c| < \delta$ entonces en c no se alcanza un extremo local.*

Teorema (Criterio de la 2ª derivada)

Supongamos que la función $f(x)$ verifica que $f'(c) = 0$ y que $f''(c)$ existe.

1. *Si $f''(c) < 0$ entonces en c se alcanza un máximo local.*
2. *Si $f''(c) > 0$ entonces en c se alcanza un mínimo local.*

Extremos absolutos

Cálculo de los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado

Los valores extremos de una función $f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ existen y sólo se pueden alcanzar en sus puntos críticos o en los extremos del intervalo. Procedimiento para encontrarlos:

1. Encuentra los puntos críticos $c_1, c_2,...,c_n$ de f en el intervalo abierto (a, b).
2. El máximo y el mínimo de los valores $f(a), f(c_1),..., f(c_n)$ y $f(b)$ son respectivamente el máximo y el mínimo absolutos de f en $[a, b]$.

Cálculo de los extremos absolutos de una función continua en un intervalo abierto

Supongamos que f es continua en el intervalo abierto (a, b) donde a puede ser $-\infty$ y b puede ser $+\infty$.
Los extremos absolutos no tienen por qué existir pero si existen se alcanzarán en puntos críticos.
Procedimiento para encontrarlos:

1. Calcula, si existen, $f(a_+) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y $f(b_-) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.
2. Encuentra los puntos críticos $c_1, c_2,...,c_n$ de f en el intervalo abierto (a, b).
3. El máximo (el mínimo) de los valores $f(c_1),...,f(c_n)$ es el máximo (respectivamente el mínimo) absoluto de f en (a, b) si es mayor o igual (respectivamente menor o igual) que $f(a_+)$ y $f(b_-)$.

Método de Newton.

Ecuación $f(x) = 0$ con f función derivable.

Algoritmo del Método de Newton:

1. Primera aproximación: x_0
2. Conocida la aproximación x_n definimos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$$

- Si la sucesión $\{x_n\}$ converge lo hace hacia una raiz de la ecuación y se pueden aceptar como exactas las cifras decimales que se repiten de un paso al siguiente.
- Si la sucesión $\{x_n\}$ no converge o lo hace hacia una raiz no buscada se debe reiniciar el algoritmo con una mejor primera aproximación x_0.

Ecuación $\cos x = x$

$\cos x - x = 0$ luego $f(x) = \cos x - x$, y así

$$g(x) = x - \frac{\cos x - x}{-\operatorname{sen} x - 1}$$

$x_0 = 1$, $x_1 = g(x_0) = 0{,}75036386784024389303$, $x_2 = g(x_1) = 0{,}73911289091136167036$,
$x_3 = g(x_2) = 0{,}73908513338528396976$, $x_4 = g(x_3) = 0{,}73908513321516064166$,
$x_5 = g(x_4) = 0{,}73908513321516064165 = x_6$

Regla de L'Hôpital.

Teorema

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones diferenciables en un intervalo abierto que contiene a a, salvo quizá en el propio a, y tal que $g'(x) \neq 0$ para todo x en el intervalo excepto posiblemente en a.
Si se verifica una de las dos condiciones siguientes (indeterminaciones de cociente):

- $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *y* $\lim_{x \to a} g(x) = 0$.
- $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ *y* $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tanto si el límite del segundo miembro existe como si es $+\infty$ o $-\infty$.

Nota: Se puede sustituir a en el enunciado por a^-, a^+, $+\infty$ o $-\infty$.

Primitivas de una función.

Definición

Se dice que una función F es una **primitiva** *(o antiderivada) de una función f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

Teorema (Las primitivas de una función difieren en una constante)

$F'(x) = G'(x)$ para todo $x \in [a,b]$ si y sólo si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + C$ para todo $x \in [a,b]$.

Notación de la integral indefinida.

Si $F'(x) = f(x)$ en un intervalo I todas las primitivas de f se representan por

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde $\int$ es el **símbolo integral**. La notación $\int f(x)dx$ se denomina **integral indefinida** de $f(x)$ respecto a x. La función $f(x)$ se denomina **integrando**. El proceso de encontrar una primitiva se denomina **integración**. El número C es la denominada **constante de integración**.

Primitivas de una función.

La derivación y la integración son fundamentalmente operaciones inversas.

$\frac{d}{dx}(\ )$ denota la derivación de ( ) respecto a x

$\int (\ )dx$ denota la integración de ( ) respecto a x.

Si $\int f(x)dx = F(x) + C$ entonces F es una primitiva de f, es decir, $F'(x) = f(x)$ y así

- Una primitiva de la derivada de una función es esa función más una constante:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

- La derivada de una primitiva de una función es esa función:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$$

Toda fórmula de derivación nos da la correspondiente fórmula de integración.

Propiedades de la integral indefinida.

Teorema (La integración es lineal.)

Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Entonces

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C$, *donde k es una constante.*
2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + C$

Regla de integración por partes.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones diferenciables se tiene que:

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx$$

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

Teorema (Regla de sustitución.)

Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I, f es una función continua en I y F es una primitiva de f en I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Problema del área.

Área A bajo la gráfica de una función $y = f(x)$ en $[a, b]$

Suponemos f continua en $[a, b]$ y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

- Se divide $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de la misma longitud $\triangle x = (b-a)/n$, $x_k = a + k\triangle x$ (**partición regular** del intervalo $[a, b]$).
- Se elige un **punto de muestra** x_k^* en cada uno de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. Así $f(x_k^*)\triangle x$ representa el área de un rectángulo de base el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y altura $f(x_k^*)$.
- Se aproxima el área A mediante la suma de las áreas de los n rectángulos:

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\triangle x = f(x_1^*)\triangle x + f(x_2^*)\triangle x + \cdots + f(x_n^*)\triangle x$$

Definición

Sea f continua en $[a, b]$ y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. El área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$ se define como

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\triangle x$$

Integral definida: Sumas de Riemann.

Sumas de Riemann de una función $y = f(x)$ en $[a, b]$

Suponemos f función acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$.

- Se divide $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitudes $\triangle x_k = x_k - x_{k-1}$, donde

  $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

  Esta colección de números de denomina **partición** del intervalo $[a, b]$ y se denota por P.
- Sea $||P||$ la mayor de las longitudes $\triangle x_k$ de los intervalos que se denomina **norma** de la partición P.
- Se elige un **punto de muestra** x_k^* en cada uno de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$.
- Se forma la suma:

  $$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\triangle x_k = f(x_1^*)\triangle x_1 + f(x_2^*)\triangle x_2 + \cdots + f(x_n^*)\triangle x_n$$

  que se denomina **suma de Riemann**.

Integral definida: definición.

Definición (Integral definida)

*Sea f función acotada en un intervalo cerrado $[a,b]$. La **integral definida** de f en $[a,b]$ se define, si el límite existe, como*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\triangle x_k$$

*En este caso se dice que f es **integrable** en $[a,b]$. Los números a y b se denominan, respectivamente, **límite inferior** y **límite superior** de la integral y la función f es el **integrando**.*

Teorema (Condiciones suficientes de integrabilidad)

- *Si f es continua en $[a,b]$ entonces f es integrable en $[a,b]$.*
- *Si f es acotada en $[a,b]$ y sólo tiene un número finito de discontinuidades entonces f es integrable en $[a,b]$.*

Corolario

Sea f continua en $[a,b]$ y tal que $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$, entonces el área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a,b]$ es

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Propiedades de la integral definida.

Definición (Límites de integración)

- *Si a está en el dominio de f entonces* $\int_a^a f(x)dx = 0.$
- *Si f es integrable en $[a,b]$ entonces* $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Teorema (Linealidad)

Sean f y g funciones integrables en $[a,b]$.

- $\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$
- $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

Teorema (Propiedad aditiva del intervalo)

Sea f una función integrable en un intervalo cerrado que contiene a los puntos a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Propiedades de la integral definida.

Teorema (Integral definida de una constante)

Para cualquier constante k

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a).$$

Teorema (Propiedades de comparación)

Sea f una función integrable en $[a,b]$.

- *Si $m \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx$.*
- *Si $f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.*

Si f y g son funciones integrables en $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Teorema fundamental del Cálculo.

Teorema (Teorema fundamental del Cálculo)

Sea f una función continua en $[a,b]$. La función g definida para todo $x \in [a,b]$ como:

$$g(x) = \int_a^x f(s)ds.$$

es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $g'(x) = f(x)$, es decir, g ***es una primitiva de*** *f.*

Corolario

Sean α y β continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), y f continua en un intervalo que contiene a $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ para cada $x \in [a,b]$ entonces:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(s)ds\right) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

Corolario (Teorema de evaluación)

Si f es continua en $[a,b]$ y F es una primitiva de f entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Regla de sustitución

Sea $u = g(x)$ una función cuya derivada es continua en el intervalo $[a, b]$ y sea f una función continua en el rango de g, entonces si $F(u)$ es una primitiva de $f(u)$ se tiene que:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Regla de integración por partes.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables en $[a, b]$ con f' y g' continuas en $[a, b]$ se tiene que

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx$$

Definición (Área entre dos curvas)

El área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ *y* $x = b$, *donde* f *y* g *son funciones integrables en* $[a, b]$ *con* $f(x) \geq g(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$ *es:*

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Definición (Volumen de un sólido a partir del área de sus secciones transversales.)

Sea S *el sólido que se encuentra entre* $x = a$ *y* $x = b$. *Si el área de la sección transversal de* S *en el plano* P_x, *que pasa por* x *y es perpendicular al eje* x, *es* $A(x)$, *con* $A(x)$ *función integrable en* $[a, b]$, *entonces el volumen de* S *es:*

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

Definición (Longitud de un arco de curva)

Sea la curva $y = f(x)$, donde f es una función con derivada continua en $[a,b]$, entonces la longitud del arco de la curva entre los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Si la curva está definida paramétricamente como $x = f(t)$, $y = g(t)$ para $t \in [a,b]$, con f y g funciones con derivada continua en $[a,b]$, entonces la longitud del arco de la curva entre los puntos $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

Definición (Valor medio de una función en un intervalo)

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ se define el valor medio de f en $[a,b]$ como:

$$\bar{f}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Teorema (Teorema del Valor Medio para integrales)

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ entonces existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)$$